

seção

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

RESPONSÁVEIS

EDUARDO TENGAN E ÉLVIA MUREB SALLUM

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM — PROBLEMAS

IME/USP — CIDADE UNIVERSITÁRIA

RUA DO MATÃO, 1010, BLOCO B, SALA 105

05508-090 — SÃO PAULO, SP

PROBLEMAS

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

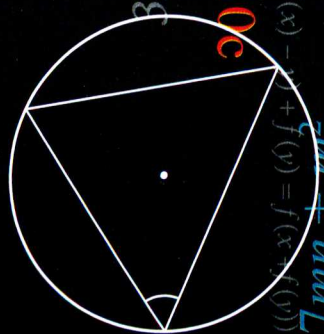
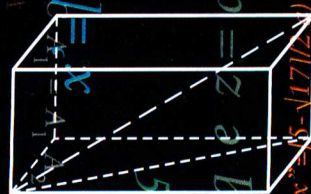
$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$



$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

As soluções dos problemas 361 a 365 serão corrigidas apenas se enviadas até 20 de junho de 2014.

361

Se x é um número real, seja $\lfloor x \rfloor$ o piso de x , ou seja, o maior inteiro n tal que $n \leq x$. Por exemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

a) Mostre que, se n é um inteiro positivo, então

$$\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor = n-1.$$

b) Considere os conjuntos de números naturais

$$A = \left\{ \left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \left\lfloor n(2+\sqrt{2}) \right\rfloor \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots \right\}$$

Mostre que A e B formam uma *partição* do conjunto dos inteiros positivos, isto é, mostre que cada inteiro positivo pertence a exatamente um dos conjuntos A ou B .



362

Seja $n \geq 1$ um natural e k um natural tal que $0 \leq k \leq n$. Denotamos por $\binom{n}{k}$ o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^n$.

(a) Se n é uma potência de um primo p , mostre que $\binom{n}{k}$ é divisível por p para $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

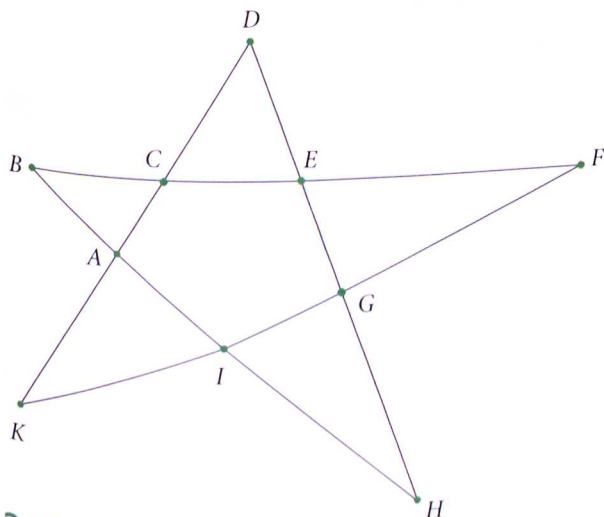
(b) Reciprocamente, mostre que, se um primo p divide $\binom{n}{k}$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, então n é uma potência de p .

363

Um astrônomo somou todas as distâncias entre 50 estrelas que ele observou com um telescópio, obtendo a soma S . De repente, uma nuvem ocultou 25 das estrelas. Mostre que a soma das distâncias entre as 25 estrelas visíveis é menor do que $S/2$.

364

Mostre que é impossível desenhar uma estrela, como na figura, com $AB < BC$, $CD < DE$, $EF < FG$, $GH < HI$ e $IK < KA$.



365

2013 formigas puntiformes são colocadas em posições aleatórias ao longo de uma fita métrica unidimensional, de 2013 cm de comprimento, que está

flutuando no ar. Um cronômetro é ligado e, nesse instante, cada formiga escolhe o sentido para a direita ou para a esquerda e passa a andar sobre a fita no sentido escolhido com velocidade constante de 1 cm por segundo, até que encontre outra formiga ou o fim da fita. Quando uma formiga chega ao fim da fita, ela cai e não retorna mais. Quando duas formigas se encontram, cada uma passa a seguir no sentido oposto ao que seguia antes do encontro. Após que instante você pode garantir que não há mais formigas sobre a fita?

PROBLEMINHAS

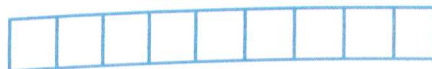
1

Exatamente no momento em que o ponteiro das horas passa pelo 12, uma formiga começa a andar ao longo da borda do relógio no sentido anti-horário, partindo do 6, com velocidade constante. Quando a formiga encontra o ponteiro das horas, ela muda de direção e continua a andar na mesma velocidade no sentido horário.

Quarenta minutos após o primeiro encontro, a formiga se encontra pela segunda vez com o ponteiro das horas e morre. Quanto tempo a formiga andou?

2

Coloque os números de 1 a 9, sem repetir, um em cada casa da figura, de modo que:



- as casas que contêm 1 e 2 e todas as outras casas entre elas somam 12;
- as casas que contêm 3 e 4 e todas as outras casas entre elas somam 34;
- as casas que contêm 4 e 5 e todas as outras casas entre elas somam 45;

(Tirados do livro *Hard-to-solve brainteasers*, de Jaime & Lea Ponlchik.)

Respostas na p. 40

